(Var)

(٢) الانحراف المتوسط : The Mean Deviation

(أ) البيانات غير مبوبة :

تعريف (٥ : ٢)

اذا كان لدينا n من المشاهدات $y_1, y_2, ..., y_n$ فان الانحراف المتوسط لها هو متوسط الانحرافات المطلقة (أي باهمال الاشارة) عن وسطها الحسابي ويرمز له بـ M.D. أي أن :

$$M.D. = \frac{\sum|y_i - \bar{y}|}{n}$$

وان السبب في أخذ الانحرافات المطلقة هو ان ابقاء الاشارات الموجبة والسالبة يجعل مجموع الانحرافات صفراً حيث اننا ذكرنا سابقاً بأن: $\sum(y_i - \bar{y}) = 0$ دائماً .

مثال (٢) أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية :

$$y_i = 9, 8, 6, 5, 7$$

الحـل :

y_i	$y_i - \bar{y}$	$\lvert y_i - \bar{y} \rvert$
9 8 6 5 7	2 1 -1 -2 0	2 1 1 2 0
$\sum y_i = 35$ $\bar{y} = 7$	0	6

$$\therefore \quad M.D. = \frac{\sum|y_i - \bar{y}|}{n} = \frac{6}{5}$$

$$= 1.2$$

تعريف : (٣ : ٥)

اذا كانت $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_k$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k$ على التوالي
فان الانحراف المتوسط هو :

$$M.D. = \frac{\sum f_i |y_i - y|}{\sum f_i}$$

مثال (٣) اوجد الانحراف المتوسط لجدول التوزيع التكراري (٣ : ١)

الحــل :

الفئات	f_i	y_i	$f_i y_i$	$\|y_i - \bar{y}\|$	$f_i\|y_i - \bar{y}\|$
60 – 62	5	61	305	6·45	32·25
63 – 65	18	64	1152	3·45	62·10
66 – 68	42	67	2814	0·45	18·90
69 – 71	27	70	1890	2·55	68·85
72 – 74	8	73	584	5·55	44·40
	100		6745		226·50

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$M.D. = \frac{\sum f_i |y_i - \bar{y}|}{\sum f_i} = \frac{226.5}{100} = 2.265$$

(٣) التباين والانحراف القياسي Variance and Standard Deviation

لكي يمكننا التغلب على مشكلة الاشارات عند جمع الانحرافات والتي تؤدي دائماً لأن يكون مجموع انحرافات أي عينة عن وسطها الحسابي يساوي صفراً ، وبدلاً من أخذ القيم المطلقة للانحرافات أي بدون اشارات كما سبق في الجزء السابق فاننا نستطيع أن نتغلب على ذلك بطريقة اخرى وهي بتربيع قيم الانحرافات وبذلك تصبح جميعها موجبة ، أي نحصل على مجموع مربعات الانحرافات، Sum of Squares والتي يرمز لها (SS) وعلى ذلك فان :

$$SS = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

ولكي نأخذ في الاعتبار حجم العينة حتى يمكن مقارنة العينات المختلفة الأحجام فاننا نقسم مجموع مربعات الانحرافات على درجات الحرية (n − 1) . وبذلك نحصل على ما يسمى بالتباين (S^2) .

تعريف (٥ : ٤)

اذا كان لدينا n من المشاهدات $y_i = y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ فإن التباين (ويرمز له S^2) يكون :

$$S^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1}$$

ويلاحظ ان القانون السابق هو لحساب تباين العينة أما اذا كانت قيم المشاهدات تمثل المجتمع كله فإن التباين (ويرمز له في هذه الحالة σ^2 وتلفظ باللاتيني Sigma Square) يحسب كما يلي :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum (y_i - \mu)^2}{N}}$$

حيث أن :

الوسط الحسابي للمجتمع = μ

عدد مفردات المجتمع = N

والسبب اننا نقسم على (n − 1) في حالة العينة ، اننا نقسم على عدد القيم الحرة أي على درجات الحرية ولما كنا نعرف ان مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوي

صفراً لذلك فعند سحب عينة فان $(n - 1)$ من المشاهدات هي قيم حرة. أما المشاهدة الأخيرة فلابد ان يكمل انحرافها مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي الى الصفر أي ان احدى المشاهدات تثبت بمعرفة انحرافات $(n - 1)$ من المشاهدات ، وعلى ذلك فان عدد القيم الحرة في أية عينة هي $(n - 1)$ وهي ما سميناه بدرجات الحرية .

ونظراً لاننا عند حساب التباين قد قمنا بتربيع الانحرافات ، فان قيمة التباين تكون مقاسة بمربع الوحدات المستخدمة في قياس المشاهدات ، فاذا كانت المشاهدات مقاسة بالسنتيمتر فان التباين يكون مقاساً بالسنتيمتر المربع . ولا توجد مشكلة في ذلك ، ولكن المشكلة تظهر عندما يكون مربع الوحدات غير ذي معنى او غير مقبول .

فمثلاً اذا كانت المشاهدات عبارة عن أوزان بالكيلوغرام او عبارة عن مبالغ بالدينار او عبارة عن أعداد عمال مثلاً او عدد الاطفال في الأسر المختلفة فان التباين يكون عندئذ مقاساً بالكيلوغرام المربع او الدينار المربع او العامل المربع او الطفل المربع وهذه كلها غير ذات معنى .

وكَحَلٍّ لذلك ولكي نرجع وحدات القياس الى أصلها فاننا نأخذ الجذر التربيعي للتباين لنحصل على قيمة (S) (أي ان $S = \sqrt{S^2}$) وهو ما يسمى بالانحراف القياسي والذي يكون مقاساً بالوحدات الاصلية أي في الحالات السابقة يكون مقاساً بالسنتيمتر او الكيلوغرام او الدينار او العامل او الطفل وهكذا .

تعريف (٥ : ٥) :

الانحراف القياسي S لعينة ما هو الجذر التربيعي لتباين تلك العينة :

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{n}}{n - 1}}$$

ويكون الانحراف القياسي للمتجمع σ (Sigma) هو :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - u)^2}{N}}$$

ولكي نثبت ان معادلتي التباين (أو الانحراف القياسي) السابق ذكرهما متساويتان نتبع الخطوات التالية :

$$S^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$$

حيث أن :

مجموع مربعات الانحرافات = $\sum (y_i - \bar{y})^2$

وتسمى للاختصار مجموع المربعات Sum of Squares ويرمز لها SS

$$\begin{aligned} \therefore SS &= \sum (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum (y_i^2 - 2\bar{y}y_i + \bar{y}^2) \\ &= \sum y_i^2 - 2\bar{y}\sum y_i + n(\bar{y})^2 \\ &= \sum y_i^2 - 2\left(\frac{\sum y_i}{n}\right)\left(\sum y_i\right) + n\frac{(\sum y_i)^2}{n^2} \\ &= \sum y_i^2 - \frac{2(\sum y_i)^2}{n} + \frac{(\sum y_i)^2}{n} \\ &= \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \end{aligned}$$

وعليه فان التباين يساوي :

$$S^2 = \frac{SS}{n-1} = \frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1}$$

وهذه هي الطريقة المختصرة لايجاد التباين (أو نأخذ جذرها لايجاد الانحراف القياسي).

مثـال(٤) البيانات التالية تبين كمية المحصول / للقطعة (كغم) للقطن في خمس مزارع. احسب الانحراف القياسي لها

$$y_i = 9, 8, 6, 5, 7$$

الحـل :

(١) الطريقة المطولة

y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
9	2	4
8	1	1
6	−1	1
5	−2	4
7	0	0
$\sum y_i = 35$ $\bar{y} = 7$	0	10

$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$

$\bar{Y} =$

$$S = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{10/4} = \sqrt{2\cdot5} = 1\cdot58(\text{kgm})$$

(٢) الطريقة المختصرة

y_i	y_i^2
9	81
8	64
6	36
5	25
7	49
$\sum y_i = 35$	$\sum y_i^2 = 255$

$$SS = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

$$= 255 - \frac{(35)^2}{5} = 10$$

$$\therefore S = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{2\cdot5} = 1\cdot58 \text{ kgm.}$$

أما التباين لهذه القيم فهو مربع الانحراف القياسي أي نرفع الجذر :

$$\therefore S^2 = \frac{10}{4} = 2\cdot5\,(\text{kgm})^2$$

(ب) البيانات مبوبـة

تعريف (٥ : ٦) :

اذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_k$ تمثل مراكز الفئات في جدول التـوزيع التكراري وان تكراراتها هي $f_1, f_2, \ldots, f_k$ على التوالي فان الانحراف القياسي لهـا هو :

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i(y_i - \bar{y})^2}{\sum f_i - 1}} = \sqrt{\frac{\sum f_i y_i^2 - \frac{(\sum f_i y_i)^2}{\sum f_i}}{\sum f_i - 1}}$$

مثـال(٥) أحسب الانحراف القياسي والتباين لجدول التوزيع التكراري (٣ : ١) :

الحـل :

(١) الطريقة المطولة

الفئات	f_i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$f_i(y_i - \bar{y})^2$
60 – 62	5	61	– 6·45	41·6025	208·0125
63 – 65	18	64	– 3·45	11·9025	214·2450
66 – 68	42	67	– 0·45	0·2025	8·5050
69 – 71	27	70	2·55	6·5025	175·5675
72 – 74	5	73	5·55	30·8025	246·4200
	100				852·7500

فمجموع المربعات SS هو :

$$SS = \sum f_i(y_i - \bar{y})^2 = 852{\cdot}7500$$

أما التباين فهو :

$$S^2 = \frac{SS}{\sum f_i - 1} = \frac{852{\cdot}7500}{99} = 8{\cdot}6$$

أما الانحراف القياسي فهو :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{8{\cdot}6} = 2{\cdot}9$$

(٢) الطريقة المختصرة

الفئات	f_i	y_i	$f_i y_i$	y_i^2	$f_i y_i^2$
60 – 62	5	61	305	3721	1860[illegible]
63 – 65	18	64	1152	4096	73728
66 – 68	42	67	2814	4489	188538
69 – 71	27	70	1890	4900	132300
72 – 74	5	73	584	5329	42632
	100		6745		4558[illegible]